ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 28 FÉVRIER 1916.

PRÉSIDENCE DE M. CAMILLE JORDAN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** s'exprime en ces termes :

J'ai le regret d'annoncer à l'Académie la mort de notre associé M. **Richard Dedekind**, décédé à Brunswick le 12 février 1916 à l'âge de 85 ans.

Il avait publié d'importants Mémoires sur l'équation binome, sur les fonctions modulaires et abéliennes. Mais son œuvre capitale est la théorie des entiers algébriques.

Le champ de l'Arithmétique, longtemps borné aux entiers ordinaires, avait reçu un accroissement considérable lorsque Gauss y fit entrer les nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Il était tout indiqué d'essayer de soumettre au calcul des entiers dans l'expression desquels figureraient des irrationnelles plus complexes. Mais on se heurta dès l'abord à des obstacles imprévus. Les théorèmes fondamentaux de l'Arithmétique cessaient d'être applicables à ces nouveaux entiers. Ainsi un nombre premier pouvait diviser un produit de deux autres nombres sans diviser aucun des deux.

Kummer leva cette difficulté pour les entiers formés avec les racines de l'unité en introduisant la notion de facteurs idéaux, qui, semblables à certains radicaux de la Chimie, n'apparaissent jamais isolés, mais figureraient à l'état de combinaison dans les entiers ordinaires.

Mais lorsqu'on voulut passer de ce cas particulier à la théorie générale des entiers complexes, de nouveaux obstacles surgirent, et c'est en suivant une voie toute différente que M. Dedekind est parvenu à les surmonter.

Il élargit tout d'abord la définition de l'entier algébrique, en englobant sous ce titre certains nombres exceptionnels d'apparence fractionnaire,

jouissant cependant de la propriété essentielle des nombres à forme entière, et dont l'exclusion aurait troublé la théorie.

Il prend en second lieu comme sujet direct de son étude, au lieu de l'entier considéré, l'ensemble de ses multiples, qu'il appelle *son idéal.*

A ces idéaux principaux il adjoint des idéaux secondaires; ce sont de nouvelles familles de nombres déduites des précédentes par voie d'addition.

Les idéaux ainsi formés n'ont de commun que le nom avec ceux de M. Kummer; ce ne sont plus des abstractions, mais des réalités. M. Dedekind, après avoir convenablement défini leur multiplication, arrive à cette conséquence que *tout idéal peut être exprimé d'une seule manière par un produit d'idéaux premiers.*

On ne saurait exagérer l'importance de ce théorème. Il écarte définitivement les obstacles qui obstruaient l'entrée d'une immense région, dont l'Arithmétique actuelle n'est qu'un petit coin.

En explorant le nouveau domaine qu'il venait d'ouvrir, M. Dedekind a pu établir cette belle proposition :

Les idéaux dépendant d'une même irrationnelle peuvent se répartir en un nombre fini de classes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Sur certains polygones dont les sommets décrivent des courbes algébriques et dont les côtés enveloppent des courbes algébriques.* Note de M. **Paul Appell.**

I. Des Notes récentes de M. Darboux [1] et de M. Fontené [2] ont appelé l'attention sur une généralisation des théorèmes de Poncelet à l'aide de chaînes de coniques. Je ne sais si l'on a cherché à associer des courbes algébriques, de façon qu'il existe des polygones dont les sommets décrivent d'une manière continue certaines de ces courbes C pendant que leurs côtés enveloppent les autres Γ. Aussi vais-je indiquer très sommairement comment l'on peut, à l'aide de la représentation paramétrique, propre ou impropre, d'une courbe par les fonctions circulaires, elliptiques ou automorphes, déterminer des courbes associées C et Γ.

---

[1] *Comptes rendus,* t. 162, 10 et 17 janvier et 7 février 1916, p. 57, 101 et 214.

[2] *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. 16, 1897, et *Comptes rendus,* t. 162, 7 février 1916, p. 213.

II. Nous considérons ici des courbes algébriques C, telles que les coordonnées x et y d'un point de C soient exprimées par des fonctions trigonométriques de période ω ou des fonctions elliptiques de périodes ω et ω' d'un paramètre t :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Cette représentation peut être propre ou impropre; par exemple, si les coordonnées x et y s'expriment en fonctions rationnelles d'un paramètre u, on peut ensuite remplacer u par une fonction trigonométrique ou une fonction elliptique de t.

III. Soient alors n courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, distinctes ou non, avec les représentations paramétriques

$$(M_i) \qquad x_i = \varphi_i(t_i), \qquad y_i = \psi_i(t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

par des fonctions trigonométriques ou elliptiques aux mêmes périodes ω et ω'.

Prenons des constantes α_i et des quantités ε_i égales à ± 1; considérons les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ correspondant aux valeurs suivantes des paramètres.

Le paramètre t_1 étant arbitraire, prenons

$$t_2 = \varepsilon_1 t_1 + \alpha_1, \quad t_3 = \varepsilon_2 t_2 + \alpha_2, \quad \ldots, \quad t_n = \varepsilon_{n-1} t_{n-1} + \alpha_{n-1}, \quad t_{n+1} = \varepsilon_n t_n + \alpha_n$$

et assujettissons les α_i et les ε_i à cette condition que t_{n+1} soit de la forme

$$t_{n+1} = t_1 + k\omega + h\omega'$$

(k et h entiers). Alors le point de la courbe C_1 de paramètre $t'_1 = t_{n+1}$ se confond avec M_1 et, quand t_1 varie, le polygone $M_1 M_2 \ldots M_n$ varie d'une manière continue de telle façon que ses côtés restent tangents à certaines courbes algébriques fixes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.

Dans cette catégorie rentrent les polygones de Poncelet; pour obtenir ceux qui sont inscrits dans un cercle et circonscrits à des cercles, il suffit d'employer la représentation paramétrique du cercle telle qu'elle se présente quand on exprime en fonction du temps les coordonnées du pendule simple (voir Jacobi, *Œuvres complètes*, t. 1, p. 279-293). Dans cette même catégorie rentrent également les chaînes de coniques de M. Fontené et de M. Darboux.

Un exemple élémentaire du cas où les ε_i sont tous égaux à -1, n étant pair, a été donné par Steiner (voir *Leçons sur la Géométrie* de Clebsch,

traduction française par A. Benoist, Gauthier-Villars, t. 2, p. 373); dans ce cas, les courbes C_i se confondent, les sommets du polygone décrivent une cubique et ses côtés enveloppent une courbe Γ de seconde classe décomposée en deux points.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les réseaux plans qui peuvent, d'une infinité de manières, être considérés comme la projection orthogonale des lignes de courbure d'une surface.* Note de M. C. **Guichard**.

Soient M un point qui décrit une surface rapportée à ses lignes de courbure, m la projection orthogonale de M sur un plan P que je suppose horizontal. Le point m décrit un réseau plan qui, d'après mes notations, est un réseau 2O. Le réseau m est la projection horizontale des lignes de courbure d'une infinité de surfaces, savoir celles qui se déduisent de la surface (M) par une translation verticale et leurs symétriques par rapport au plan P; je ne considère pas ces surfaces comme distinctes. Mais il peut se faire que sur la verticale du point m on puisse trouver un autre point M_1 qui décrit une surface rapportée à ces lignes de courbure; dans ce cas particulier, le réseau m est deux fois 2O. J'ai déjà signalé ce cas particulier (*Comptes rendus*, t. 138, 1904, p. 258).

J'étudie, dans cette Note, un cas plus particulier, celui où sur la verticale du point m il y a une infinité de points qui décrivent des surfaces dont les lignes de courbure se projettent horizontalement suivant les courbes du réseau m, c'est-à-dire le cas où le réseau m est une infinité de fois 2O. Tout d'abord il y a une solution particulière qui est évidente *a priori* : il suffit de prendre pour surface (M) une surface de révolution à axe vertical, ou plus généralement une surface moulure engendrée par une courbe plane de forme invariable dont le plan roule sur un cylindre dont les génératrices sont verticales. Dans ce cas particulier, l'une des séries de courbes du réseau m est composée de droites. Je laisse de côté ce cas particulier des surfaces moulures.

Je suppose d'abord que sur la verticale du point m il y ait trois points M_1, M_2, M_3 qui décrivent des surfaces distinctes rapportées à leur ligne de courbure, c'est-à-dire que le réseau (m) soit trois fois 2O. Soient x_1, x_2 les coordonnées du point m; z_1, z_2, z_3 les cotes respectives de M_1, M_2, M_3. On aura

$$(1)\qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dz_1^2 = h^2\,du^2 + l^2\,dv^2,$$

x_1, x_2, z_1 sont solutions de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Cette équation est définie par la condition d'admettre pour solution x_1 et x_2; il en résulte que z_2 et z_3 sont des solutions de cette équation. On aura donc

$$(3) \qquad dx_1^2+dx_2^2+dz_2^2=h^2U_2^2\,du^2+l^2V_2^2\,dv^2.$$

$$(4) \qquad dx_1^2+dx_2^2+dz_3^2=h^2U_3^2\,du^2+l^2V_3^2\,dv^2,$$

U_2, U_3 étant fonctions de u seul; V_2, V_3 de v seul. De ces équations on déduit

$$(5) \qquad dz_1^2-dz_2^2=h^2(1-U_2^2)\,du^2+l^2(1-V_2^2)\,dv^2,$$

$$(6) \qquad dz_1^2-dz_3^2=h^2(1-U_3^2)\,du^2+l^2(1-V_3^2)\,dv^2;$$

ce qui peut s'écrire

$$(7) \qquad dz_1^2-dz_2^2=H^2\,du^2+L^2\,dv^2, \qquad H=h\sqrt{1-U_2^2}, \qquad L=l\sqrt{1-V_2^2}.$$

$$(8) \qquad dz_1^2-dz_3^2=H^2U^2\,du^2+L^2V^2\,dv^2, \qquad U^2=\frac{1-U_3^2}{1-U_2^2}, \qquad V^2=\frac{1-V_3^2}{1-V_2^2}.$$

Il en résulte que les points $N_2(z_1, iz_2)$ et $N_3(z_1, iz_3)$ décrivent des réseaux O plans associés, ayant une coordonnée commune z_1. On est donc ramené à étudier ces réseaux. Si l'on désigne par φ l'angle de la première tangente du réseau N_1 avec l'axe z_1, par ψ l'angle analogue pour le réseau N_2, on a

$$(8\ bis) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial u}=H\cos\varphi=HU\cos\psi, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial v}=-h\sin\varphi=-LV\sin\psi. \end{cases}$$

On a donc

$$(9) \qquad \begin{cases} \cos\varphi=U\cos\psi, \\ \sin\varphi=V\sin\psi, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\cos\varphi=U\sqrt{\frac{1-V^2}{U^2-V^2}}=\sqrt{\frac{\dfrac{1}{V^2}-1}{\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{1}{U^2}}}, \qquad \sin\varphi=V\sqrt{\frac{U^2-1}{U^2-V^2}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{U^2}}{\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{1}{U^2}}},$$

$$\cos\psi=\sqrt{\frac{1-V^2}{U^2-V^2}}, \qquad \sin\psi=\sqrt{\frac{U^2-1}{U^2-V^2}}.$$

Par un changement de variables on peut poser

$$(10) \qquad \frac{1}{V^2}-1=\frac{\omega}{v}, \qquad 1-\frac{1}{U^2}=\frac{\omega}{u},$$

ω étant une constante; on aura alors

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \sqrt{\dfrac{u}{u+v}}, & \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{v}{u+v}}, \\ \cos\psi = \sqrt{\dfrac{u-\omega}{u+v}}, & \sin\psi = \sqrt{\dfrac{v+\omega}{u+v}}. \end{cases}$$

On voit que, si φ est donné, il y a une infinité de valeurs pour ψ; ce qui revient à dire que si z_1 et z_2 sont donnés, il y a une infinité de valeurs pour z_3; donc:

Si un réseau plan est trois fois 2 O, il est 2 O d'une infinité de manières.

Le théorème s'étend naturellement par une démonstration analogue aux réseaux trois fois 2 O dans un espace d'ordre quelconque.

Il est facile de trouver des surfaces possédant la propriété des surfaces (M_1), (M_2), (M_3). On sait en effet qu'il existe une infinité de réseaux plans (N), (N_1), (N_2), (N_3), etc. associés entre eux et ayant une coordonnée commune; soient x et y les coordonnées de N, x et y_i celles de N_i. On aura

$$(12)\quad \begin{cases} dx^2 + dy^2 = h^2\, du^2 + l^2\, dv^2, \\ dx^2 + dy_i^2 = h^2 U_i^2\, du^2 + l^2 V_i^2\, dv^2, \end{cases}$$

x, y, y_i sont des solutions de l'équation (2). Je multiplie la première des équations (12) par $\cos^2 h$, la seconde par $\sin^2 h$ (h étant une constante) et j'ajoute. On aura

$$dx^2 + dy^2 \cos^2 h + dy_i^2 \sin^2 h = h^2[\cos^2 h + U_i^2 \sin^2 h]\, du^2 + l^2[\cos^2 h + V_i^2 \sin^2 h]\, dv^2.$$

Je pose

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y\cos h, \qquad z_i = y_i \sin h.$$

Le point $M_i(x_1, x_2, z_i)$ décrit une surface rapportée à ses lignes de courbure, et quel que soit i, la projection horizontale du réseau reste la même. L'équation de Laplace (2) à laquelle satisfont les coordonnées du réseau M_i admet les solutions

$$x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y_i^2$$

ou

$$x_1^2 + \frac{1}{\cos^2 h} x_2^2 \quad \text{et} \quad x_1^2 + \frac{1}{\sin^2 h} z_i^2.$$

Cette propriété caractérise les surfaces dont la représentation sphérique des lignes de courbure est la même que celle d'une quadrique dont

l'équation est

$$\left(x_1^2+\frac{1}{\cos^2 h}x_2^2\right)+k\left(x_1^2+\frac{1}{\sin^2}z_i^2\right)=1;$$

donc :

Les surfaces dont la représentation sphérique des lignes de courbure est la même que celle d'une quadrique sont telles que le réseau des lignes de courbure se projette sur un plan principal suivant un réseau qui est une infinité de fois 2O.

En particulier :

Si M *est un point d'une quadrique,* m *sa projection sur un plan principal, il y a sur la droite* Mm *une infinité de points qui décrivent des surfaces dont les lignes de courbure correspondent à celles de la quadrique. Toutes ces surfaces sont isothermiques.*

Je vais établir la réciproque de la première proposition. Je considère la surface (M_1) décrite par le point qui a pour coordonnées x_1, x_2, z_1 ; soit

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

le déterminant orthogonal de la représentation sphérique. On aura

$$(13)\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u}=h\beta_3,\qquad \frac{\partial z_1}{\partial v}=l\gamma_3.$$

En comparant avec les formules (8 *bis*) et en remarquant que

$$(14)\qquad H=hU_1,\qquad L=lV_1,$$

on aura

$$\beta_3=U_1\cos\varphi=U_1\sqrt{\frac{u}{u+v}},\qquad \gamma_3=-V_1\sin\varphi=-V_1\sqrt{\frac{v}{u+v}}.$$

Or, pour que α_3, β_3, γ_3 puissent être les éléments d'une colonne d'un déterminant orthogonal, il faut que

$$\alpha_3^2=1-\beta_3^2-\gamma_3^2=1-\frac{U_1^2 u+V_1^2 v}{u+v},$$

et que α_3 soit solution de l'équation

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{\beta_3}\frac{\partial\beta_3}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\gamma_3}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}.$$

En tenant compte des valeurs de β_3 et γ_3, cette équation devient

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{2}\frac{1}{u+v}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{1}{u+v}\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

La valeur de α_3 peut d'ailleurs s'écrire

$$(16) \qquad \alpha_3^2 = 2\frac{U+V}{u+v}.$$

En écrivant que α_3 est solution de l'équation (15), on trouve

$$(17) \qquad (U+V)^2 = (u+v)^2 U'V'.$$

Cette équation admet deux espèces de solutions :

1° $$U = Ku + \lambda, \qquad V = Kv - \lambda.$$

Cette solution ne convient pas au problème, puisqu'elle donne pour α_3 une valeur constante.

2° $$U = \frac{p}{u-\omega} + q, \qquad V = \frac{p}{v+\omega} - q.$$

On pourra, avec ces valeurs, former α_3, β_3, γ_3 et l'on verra que, par un changement de variables, on retrouve les formules connues pour la représentation sphérique d'une quadrique; donc :

Si un réseau de lignes de courbure d'une surface se projette sur un plan P *suivant un réseau* 2O *d'une infinité de manières, la représentation sphérique des lignes de courbure est la même que celle d'une quadrique ayant le plan* P *pour plan principal.*

CORRESPONDANCE.

M. Michaël Idvorsky Pupin adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

ASTRONOMIE. — *Observation de l'éclipse de Soleil du 3 février 1916, faite à Valence (Espagne).* Note de MM. **Tarazona** et **Marti**, présentée par M. Bigourdan.

Le premier contact, seul observable, a été noté par un temps superbe à l'équatorial Grubb, disposé pour la photographie et donnant par projection une image solaire de $0^m,10$ de diamètre.

Les corrections du pendule ont été déduites des signaux radio-télégraphiques de Paris, des 29 janvier, 3 et 5 février. Les heures conclues sont les suivantes, en temps moyen de Greenwich :

		Obs. — Calc.
Tarazona	$16^h 41^m 14^s,9$	$-4^s,7$
Marti......................	$16^h 41^m 16^s,9$	$-2^s,7$

L'heure calculée a été obtenue au moyen des données de la *Connaissance des Temps de* 1916.

Coordonnées géographiques provisoires de la station :

Long... $0^h 1^m 29^s,4$ ouest de Gr. Lat. boréale.... $39° 28' 17''$

Peu après l'observation, le Soleil s'est caché derrière les maisons voisines, ce qui n'a pas permis d'obtenir des photographies du Soleil éclipsé.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la classe de certaines expressions différentielles.* Note de M. E. **Goursat**, présentée par M. Émile Picard.

Je me suis déjà occupé, dans deux Mémoires publiés dans le *Journal de Mathématiques* (1908 et 1915), de l'usage qu'on pouvait faire de certains invariants intégraux, supposés connus, d'un système d'équations différentielles, pour la détermination des intégrales premières de ce système. Cette recherche se rattache à une question plus générale, qui se pose aussi quand on se propose d'étendre le problème de Pfaff à des équations de degré quelconque par rapport aux différentielles.

Soit ω_p une forme symbolique de degré p des différentielles de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\omega_p = \Sigma A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p nombres entiers différents pris parmi les n premiers

nombres $1, 2, \ldots, n$; les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ sont des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées partielles, de ces n variables, et la sommation est étendue à toutes les combinaisons p à p des n premiers nombres. Le produit symbolique $dx_{\alpha_1}dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}$ représente le jacobien des variables $x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\ldots x_{\alpha_p}$ par rapport à p paramètres indépendants quelconques $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Si l'on effectue un changement de variables

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

l'expression ω_p est remplacée par une expression de même espèce

$$\Omega_p = \Sigma B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p}.$$

Il peut arriver que quelques-unes des variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ou leurs différentielles ne figurent pas dans la nouvelle expression. La *classe c* de la forme symbolique ω_p est égale au nombre *minimum* de variables au moyen desquelles puisse s'exprimer ω_p par un changement de variables convenable. Ce nombre se détermine au moyen des théorèmes suivants.

Considérons, en même temps que ω_p, la forme symbolique dérivée ω'_p de degré $p+1$, qui a pour expression

$$\omega'_p = \Sigma\, dA_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_p} = \Sigma\, \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_{p+1}}.$$

A chacune de ces formes ω_p, ω'_p on peut rattacher un système d'équations aux différentielles totales

$$(\mathrm{S}) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}\, dx_i = 0 \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(\mathrm{S}') \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p i}\, dx_i = 0 \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n),$$

et ces deux systèmes sont des covariants de la forme ω_p, relativement à tout changement de variables.

Le dernier système (S′) est *complètement intégrable*, quelle que soit la forme ω_p. Si ce système ne contient que q équations linéairement distinctes, *le nombre q est égal à la classe de la forme dérivée ω'_p*.

Le système (S) n'est pas en général complètement intégrable, mais le système (S) + (S′), formé par la réunion des équations des deux systèmes (S) et (S′), est complètement intégrable. S'il comprend seulement $q+r$ équations linéairement distinctes, *la classe de ω_p est égale à $q+r$*.

Les variables qui figurent dans la forme réduite de ω_p sont précisément

les $q+r$ intégrales du système $(S)+(S')$. Mais ce système n'est pas un système complètement intégrable quelconque, et son intégration peut dans bien des cas être simplifiée. Par exemple, si $r>0$, on intégrera d'abord le système (S') qui est seulement d'ordre q.

Voici comment cette notion de classe s'introduit dans la question que je m'étais proposée sur les invariants intégraux. Soient

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt \tag{1}$$

un système d'équations différentielles, où les fonctions X_i ne renferment pas t, et $I_p=\int\omega_p$ un de ces invariants intégraux que j'ai appelés $I_p^{(e)}$, qui restent des invariants intégraux quand on multiplie les dénominateurs $X_1, \ldots, X_n$ par un facteur quelconque $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$. Si l'on suppose le système (1) ramené par un changement de variables à la forme réduite

$$\frac{dy_1}{0}=\frac{dy_2}{0}=\ldots=\frac{dy_{n-1}}{0}=\frac{dy_n}{1}=dt, \tag{2}$$

la forme symbolique ω_p se change en une nouvelle forme symbolique *où ne figurent ni y_n ni dy_n*. Cette forme ω_p est donc au plus de classe $n-1$, mais peut être de classe inférieure à $n-1$. Dans les deux cas, les variables qui figurent dans la forme réduite de ω_p sont des intégrales du système (1), et la détermination de ces variables n'exige que l'intégration d'un système complètement intégrable d'ordre inférieur à $n-1$, si ω_p est de classe inférieure à $n-1$.

Dans le premier travail consacré à ce problème, j'avais montré que les intégrales du système (S') étaient aussi des intégrales des équations (1). Ce résultat était moins complet que celui que je viens d'énoncer, puisque je ne tenais pas compte des intégrales du système $(S)+(S')$, qui n'appartiennent pas au système (S').

Le seul cas où la connaissance de l'invariant $I_p^{(e)}$ semble n'être d'aucune utilité, est celui où le système (S') se compose de $n-1$ équations distinctes. Ce système est alors équivalent au système (1). Mais l'intégration de ce système (S') peut présenter d'autres simplifications, que je ne puis indiquer ici. Dans le cas le plus défavorable, si l'on a obtenu $n-2$ intégrales de (S'), on peut obtenir la dernière intégrale par une quadrature.

Toutes ces questions feront l'objet d'un travail plus étendu.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la déformation dans la représentation conforme sous des conditions restrictives.* Note de M. T.-H. Gronwall, présentée par M. Émile Picard.

En poursuivant le sujet de ma Note du 14 février 1916 (p. 249), je considère le cas où le domaine D se reproduit par une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de l'origine. Les bornes de $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ et $|w|$ obtenues dans le cas général se resserrent maintenant de la manière suivante :

Lorsque la fonction analytique

$$w = z + a_2 z^2 + \ldots + a_\nu z^\nu + \ldots$$

donne la représentation conforme du cercle $|z| < 1$ sur l'intérieur d'un domaine simple D dans le plan des w, et que D se reproduise par une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de l'origine, on a, pour $|z| = r$ et $0 < r < 1$,

$$(1) \qquad \frac{1 - r^n}{(1 + r^n)^{1+\frac{2}{n}}} < \left|\frac{dw}{dz}\right| < \frac{1 + r^n}{(1 - r^n)^{1+\frac{2}{n}}},$$

$$(2) \qquad \frac{r}{(1 + r^n)^{\frac{2}{n}}} < |w| < \frac{r}{(1 - r^n)^{\frac{2}{n}}},$$

sauf dans le cas où

$$(3) \qquad w = \frac{z}{(1 - e^{\alpha i} z^n)^{\frac{2}{n}}} \quad (\alpha \text{ réel}),$$

les bornes supérieures et inférieures étant alors atteintes pour $z^n = r^n e^{-\alpha i}$ et $z^n = -r^n e^{-\alpha i}$ respectivement. La borne de convexité est supérieure ou égale à

$$(4) \qquad \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2n^2 + 1} - n - 1}{n - 2}},$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas (3).

Lorsque le domaine D est *convexe*, on a

$$(5) \qquad \frac{1}{(1 + r^n)^{\frac{2}{n}}} < \left|\frac{dw}{dz}\right| < \frac{1}{(1 - r^n)^{\frac{2}{n}}},$$

$$(6) \qquad \int_0^r \frac{dr}{(1 + r^n)^{\frac{2}{n}}} < |w| < \int_0^r \frac{dr}{(1 - r^n)^{\frac{2}{n}}},$$

sauf dans le cas où

$$w = \int_0^z \frac{dz}{(1 - e^{\alpha i} z^n)^{\frac{2}{n}}}, \tag{7}$$

les bornes étant alors atteintes comme plus haut.

Pour $n = 2$, il faut remplacer (4) par $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Il est facile de voir d'ailleurs que si D présente la symétrie indiquée, w sera de la forme

$$z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots,$$

Le domaine D correspondant à (3) est une étoile à n coupures infinies symétriques autour de l'origine, tandis que pour (7), nous aurons un polygone régulier.

Un problème tout autrement difficile se présente lorsqu'on se donne *a priori* quelques-uns des coefficients de w, comme l'ont fait MM. Landau et Carathéodory dans le théorème de M. Picard. En me bornant au cas le plus simple où $a_2 = a e^{\gamma i}$ $(a > 0)$ est donné, je trouve le résultat suivant :

Lorsque la fonction analytique

$$w = z + a e^{\gamma i} z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

donne la représentation conforme du cercle $|z| < 1$ sur l'intérieur d'un domaine simple D dans le plan des w, il faut que $a \leqq 2$, et en dénotant par $r(a)$, pour $0 \leqq a \leqq 1$, la racine comprise entre zéro et un de l'équation

$$\frac{2r}{1 + 2(a-1)r + r^2} - \log\frac{1+r}{1-r} = 0,$$

et par $\cos\beta$, pour $0 \leqq r \leqq r(a)$, la racine positive de l'équation

$$\frac{2r}{1 - 2r\cos\beta + r^2} - \log\frac{1+r}{1-r} = 0,$$

on a, pour $|z| = r$ et $0 < r < 1$,

$$\frac{1 - r^2}{(1 + ar + r^2)^2} < \left|\frac{dw}{dz}\right| < \begin{cases} \dfrac{1 - 2r\cos\beta + r^2}{(1-r)^{2+\cos\beta+a}(1+r)^{2-\cos\beta-a}} \\ \quad [\text{pour } a \leqq 1 \text{ et } r \leqq r(a)], \\ \dfrac{1 + 2(a-1)r + r^2}{(1-r)^4(1+r)} \\ \quad [\text{pour } a \leqq 1 \text{ et } r \geqq r(a) \text{ et pour } 1 \leqq a \leqq 2], \end{cases} \tag{8}$$

et

$$(9)\qquad \frac{r}{1+ar+r^2} < |w| < \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad (\text{pour } a<1), \\ \dfrac{2-a}{4}\log\dfrac{1+r}{1-r} + \dfrac{a}{2}\dfrac{r}{(1-r)^2} \\ \qquad (\text{pour } 1 \leqq a \leqq 2), \end{cases}$$

ces bornes étant atteintes pour les fonctions w qu'on obtient en remplaçant r par $ze^{\gamma i}$ et $-ze^{\gamma i}$ dans les bornes supérieures et inférieures respectivement.

Lorsque le domaine D est convexe, il faut que $a \leqq 1$, et l'on a

$$(10)\qquad \frac{1}{1+2ar+r^2} < \left|\frac{dw}{dz}\right| < \frac{1}{(1-r)^{1+a}(1+r)^{1-a}},$$

$$(11)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{1-a^2}.r}{1+ar} < |w| < \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^a - 1\right],$$

ces bornes étant atteintes pour les w obtenus comme précédemment. La méthode employée ne suffit pas pour donner la valeur exacte de la borne supérieure de $|w|$ dans (9) lorsque $a<1$. Il est facile cependant d'en obtenir des expressions plus ou moins approchées.

J'ai étudié aussi le cas où le domaine D est contenu à l'intérieur d'un cercle de rayon donné, et j'y reviendrai ultérieurement.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les fonctions de Bessel de plusieurs variables exprimées par des fonctions de Bessel d'une variable.* Note de M. **B. Jekhowsky**, présentée par M. Appell.

Dans une Note des *Comptes rendus* [1] M. Appell a attiré l'attention sur les fonctions de Bessel de plusieurs variables; M. Pérès [2] a étudié ces fonctions. Je me propose de donner une formule générale exprimant, sous forme de série, les fonctions de Bessel de n variables à l'aide des fonctions de $n-1$ variables. On pourra donc, de proche en proche, exprimer ces fonctions par des fonctions de Bessel d'une variable.

Soit

$$J_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ku - x_1\sin u - x_2\sin 2u - \dots - x_n\sin nu)\,du$$

la fonction de Bessel de n variables.

---

(1) *Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 419.
(2) *Comptes rendus*, t. 161, 1915, p. 168.

En décomposant le cosinus qui figure sous le signe d'intégration en

$$\cos\lambda_{n-1}\cos(x_n\sin nu)+\sin\lambda_{n-1}\sin(x_n\sin nu),$$

où

$$\lambda_{n-1}=ku-x_1\sin u-x_2\sin 2u-\ldots-x_{n-1}\sin(n-1)u,$$

et en remplaçant dans ces expressions

$$\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}x_n\sin nu$$

par

$$J_0(x_n)+2\sum_{p=1}^{p=\infty}J_{2p}(x_n)\cos 2pnu,$$

$$2\sum_{p=1}^{p=\infty}J_{2p-1}(x_n)\sin(2p-1)nu,$$

on remarque facilement que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos\lambda_{n-1}\cos 2pnu\,du$$
$$=J_{k-2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+J_{k+2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin\lambda_{n-1}\sin(2p-1)nu\,du$$
$$=J_{k-(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})-J_{k+(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

d'où la formule générale

$$\begin{aligned}J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ =J_0(x_n)J_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\\ +\sum_{p=1}^{p=\infty}J_{2p}(x_n)[J_{k-2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})-J_{k+2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})]\\ +\sum_{p=1}^{p=\infty}J_{2p-1}(x_n)[J_{k-(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})-J_{k+(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})].\end{aligned}$$

En particulier, si $n=2$ et $k=0$, la deuxième somme disparaît et l'on a

$$J_0(x_1, x_2)=J_0(x_2)J_0(x_1)+2\sum_{p=1}^{p=\infty}J_{2p}(x_2)J_{4p}(x_1).$$

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur la réduction des formes quadratiques positives.* Note (1) de M. **Gaston Julia**, présentée par M. Georges Humbert.

Les caractéristiques suivantes des formes quadratiques positives réduites sont aujourd'hui classiques.

Soit, par exemple, une forme ternaire positive

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy;$$

on sait depuis Dirichlet qu'elle *équivaut à une réduite*

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

dont le minimum absolu A est donné par le système $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, dont le deuxième minimum propre (c'est-à-dire fourni par un système où Y et Z ne sont pas tous deux nuls) est A' et est fourni par le système $X = 0$, $Y = 1$, $Z = 0$, dont le troisième minimum propre (c'est-à-dire fourni par un système où $Z \neq 0$) est A'' et est fourni par le système $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$.

La considération des réseaux de points à coordonnées entières à trois dimensions permet d'objectiver ces résultats. L'ellipsoïde $f = t^2$ qui correspond à une forme réduite, lorsque t croît de 0 à $+\infty$, s'enflera et dans sa déformation homothétique passera d'abord par le point A à l'unité de distance sur Ox, puis le premier point, hors de Ox, rencontré, sera le point B à l'unité de distance sur Oy, puis le premier point rencontré hors du plan xOy sera le point C à l'unité de distance sur Oz.

Un problème intéressant se pose dès lors :

Étant donné, par exemple, une forme f positive ternaire quelconque, on considère le réseau des points de l'espace à coordonnées entières. L'ellipsoïde $f = t^2$ en grandissant rencontrera un premier point A du réseau qui fournit le minimum absolu de f, puis le premier point rencontré hors de OA sera un point B qui fournit le deuxième minimum propre de f, puis le premier point rencontré hors du plan OAB sera un point C qui fournit le troisième minimum propre de f.

Si nous démontrons que le déterminant des coordonnées des points A, B, C est égal à 1, nous aurons directement la notion de réduite, car on

---

(1) Séance du 21 février 1916.

pourra prendre A, B, C pour bases du réseau des points entiers, et la forme f se trouvera réduite par la substitution qui fait passer de l'ancienne base à la nouvelle.

$$(1)\quad \begin{cases} x = l_1 X + l_2 Y + l_3 Z, & l_1 m_1 n_1 \text{ étant les coordonnées de A}, \\ y = m_1 X + m_2 Y + m_3 Z, & l_2 m_2 n_2 \quad \text{»} \quad \text{B}, \\ z = n_1 X + n_2 Y + n_3 Z, & l_3 m_3 n_3 \quad \text{»} \quad \text{C}, \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Cette conception de la réduction se trouve déjà dans Minkowski (approximations diophantiques, p. 114). Il y est toutefois fait usage de moyens trop compliqués pour la seule application que nous avons en vue; Minkowski ne semble pas avoir vu non plus que cette question donnait la solution du problème des *octaèdres d'un réseau* analytiquement traité par lui pages 97 et suivantes de son livre. Il est revenu sur la question des formes à n variables dans sa *Géométrie des nombres* (applications) et il a donné une limitation de la valeur du déterminant formé avec les coordonnées des points qui fournissent les premiers minimums propres. Cette limite peut être abaissée quand on étudie les formes d'un nombre de variables peu élevé et qu'on serre l'analyse de plus près. Nous le montrerons pour les formes quaternaires.

Voici la méthode géométrique qui donne aisément le résultat pour trois variables [1]. L'ellipsoïde de la famille $\mathcal{E}$, $f = t^2$, qui passe par C ne contenant d'autres points du réseau que des points du plan OAB, l'octaèdre dont les six sommets sont A, B, C et A′, B′, C′ symétriques de A, B, C, par rapport à l'origine, ne contiendra d'autres points du réseau que O, et ses sommets, à son intérieur ou sur sa surface. Sur OABC construisons un parallélépipède P; son volume sera égal au déterminant des coordonnées de A, B, C. Comme il n'y a pas de point du réseau autre que O dans l'octaèdre ABCA′B′C′, il n'y en aura pas non plus dans chacun des huit tétraèdres tels que OABC ayant pour sommet un sommet du parallélépipède P et pour arêtes les arêtes issues de ce sommet.

Le parallélépipède P ne peut donc renfermer à son intérieur que des points du réseau qui seraient *intérieurs* à l'octaèdre Γ dont les sommets sont les centres des faces de P (il n'y en a sûrement pas sur la surface de P différents des sommets). Mais Γ est homothétique de l'octaèdre ABCA′B′C′ par rapport au sommet O′ de P opposé à O et dans le rapport $\frac{1}{2}$. Si dans Γ il

[1] Pour deux variables la méthode est encore plus simple, c'est pourquoi nous l'omettons.

existait un point μ du réseau distinct du centre ω de P et de Γ, μ' symétrique de μ par rapport à ω serait aussi du réseau. $\mu\mu'$ serait un vecteur dont les projections seraient entières. L'homothétique M de μ par rapport à O′ dans le rapport 2 serait un point intérieur à l'octaèdre ABCA′B′C′ et OM équipollent à $\mu'\mu$ aurait ses projections entières; M serait un point du réseau. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse faite. Le seul point du réseau qui puisse exister dans P est ω.

On voit donc, si l'on remarque que la démonstration subsiste, si à l'ellipsoïde on substitue un *corps convexe quelconque* ayant son centre en O, que :

1° Le déterminant D des coordonnées des points A, B, C est 1 ou 2;

2° Ceci donne la solution du problème des « octaèdres du réseau » ABCA′B′C′ dont les six sommets et le centre sont du réseau, et qui ne contiennent à leur intérieur ou sur leur surface pas d'autre point du réseau.

Il est facile de voir que l'hypothèse $D = 2$ est impossible dans le cas des formes quadratiques. Effectivement, si ω centre de P est du réseau, les sept points qui sont centres des sept parallélépipèdes analogues à P et *adjacents à* P *en* O, sont aussi du réseau. Or un des huit points ainsi obtenus est toujours *intérieur à l'ellipsoïde* $\mathcal{E}$ *qui passe par* C. Car si l'on fait la substitution (1) f devient

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY$$
$$(0 < A \leqq A' \leqq A'').$$

Les huit points précédents ont pour coordonnées

$$X = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad Y = \frac{\varepsilon'}{2}, \qquad Z = \frac{\varepsilon''}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1,\ \varepsilon'' = \pm 1);$$
$$F\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}\right) = \frac{1}{4} F(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') = \frac{A + A' + A'' + 2B\varepsilon'\varepsilon'' + 2B'\varepsilon''\varepsilon + 2B''\varepsilon\varepsilon'}{4}.$$

La somme des huit valeurs possibles de $2B\varepsilon'\varepsilon'' + 2B'\varepsilon''\varepsilon + 2B''\varepsilon\varepsilon'$ est nulle. Donc une de ces valeurs est négative ou elles sont toutes nulles. Ceci suffit pour qu'un des huit points envisagés donne à F une valeur $\leqq \frac{A + A' + A''}{4}$ et cette valeur étant inférieure à la valeur A″ de F au point C, le point correspondant serait intérieur à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ qui passe en C; ceci écarte l'hypothèse $D = 2$. Donc $D = 1$ comme nous l'avions annoncé.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la puissance des ensembles mesurables* B. Note de M. **P. Alexandroff**, présentée par M. Hadamard.

1. Le but de cette Note est de résoudre le problème suivant : « Déterminer la puissance de tout ensemble *non dénombrable* mesurable B. » Ce problème m'a été posé par M. N. Lusin, et c'est grâce à son concours précieux que j'ai obtenu le résultat ci-dessous; quelques points de la démonstration lui sont également dus.

Soit E un ensemble F de classe α non dénombrable. D'après les beaux résultats de M. Lebesgue, nous pouvons développer E en tableau à double entrée

$$(\mathrm{E})\quad \left|\begin{array}{l} E_1^1 + E_1^2 + E_1^3 + \ldots + E_1^{q_1} + \ldots, \\ E_2^1 + E_2^2 + E_2^3 + \ldots + E_2^{q_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E_{p_1}^1 + E_{p_1}^2 + E_{p_1}^3 + \ldots + E_{p_1}^{q_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où l'ensemble donné E est la partie commune aux ensembles-sommes situés dans les lignes horizontales du tableau (E). Il est important de remarquer que la classe de tout ensemble $E_{p_1}^{q_1}$, soit $\alpha_{p_1}^{q_1}$, est inférieure à α, c'est-à-dire $\alpha > \alpha_{p_1}^{q_1}$. Si $E_{p_1}^{q_1}$ n'est pas un ensemble fermé, nous pouvons le développer en tableau analogue. Le terme général de ce sous-tableau, soit $E_{p_1 p_2}^{q_1 q_2}$, est un ensemble F de classe $\alpha_{p_1 p_2}^{q_1 q_2}$ inférieure à $\alpha_{p_1}^{q_1}$. Si ce n'est pas un ensemble fermé, nous pouvons le représenter par un nouveau tableau de terme général $E_{p_1 p_2 p_3}^{q_1 q_2 q_3}$ et ainsi de suite.

Considérons une suite des ensembles déduits les uns des autres $E_{p_1}^{q_1}$, $E_{p_1 p_2}^{q_1 q_2}$, $E_{p_1 p_2 p_3}^{q_1 q_2 q_3}$, ... : les classes correspondantes vont en décroissant, donc la suite ne comprend qu'un nombre *fini* de ces ensembles. Nous serons arrêtés quand nous arriverons à un ensemble fermé $E_{p_1 p_2 \ldots p_\lambda}^{q_1 q_2 \ldots q_\lambda}$ (λ fini). Donc nous représenterons, à l'aide d'une infinité énumérable d'opérations, l'ensemble donné E par un tableau dont les éléments sont des sous-tableaux, et ainsi de suite.

2. Cela posé, appelons *produit* d'ensembles donnés la partie commune à ces ensembles.

Formons le produit π_1 de n ensembles (n donné arbitrairement > 1)

$$\pi_1 = E_1^{r_1} E_2^{r_2} E_3^{r_3} \ldots E_n^{r_n},$$

où $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ constituent un système de n entiers positifs choisi arbitrairement. En remplaçant, dans ce produit π_1, chaque facteur non fermé $E_k^{r_k}$ par le produit de $n - k + 1$ ensembles $E_{k,1}^{r_k s_1} E_{k,2}^{r_k s_2} \ldots E_{k,n-k+1}^{r_k, s_{n-k+1}}$, tous les s étant des entiers quelconques déterminés, nous déduisons du produit π_1 le second produit π_2. En remplaçant, dans ce produit π_2 chaque facteur non fermé $E_{k,i}^{r_k s_i}$ par le produit de $n - k + 1$ ensembles

$$E_{k,i,1}^{r_k s_i t_1} E_{k,i,2}^{r_k s_i t_2} \ldots E_{k,i,n-k+1}^{r_k s_i t_{n-k+1}},$$

les t déterminés, choisis arbitrairement, nous aurons le troisième produit π_3 et ainsi de suite. Il est bien évident qu'en recommençant ainsi cette opération, on finira par arriver à un produit π_μ (μ fini) dont chaque facteur est un ensemble fermé. Ce produit π_μ étant un ensemble fermé, nous l'appellerons *ensemble fermé de $n^{\text{ième}}$ espèce.* Tous les produits π_μ que nous définissons ont un nombre fini de facteurs à un nombre fini d'indices; ils forment par suite un ensemble énumérable. Nous dirons qu'un ensemble fermé π_μ de $n^{\text{ième}}$ espèce est *ensemble canonique de $n^{\text{ième}}$ espèce*, si le produit $E\pi_1\pi_2\pi_3\ldots\pi_\mu$ contient une infinité non dénombrable de points. Il est clair que tous les ensembles canoniques π_μ de $n^{\text{ième}}$ espèce forment un ensemble énumérable; nous pouvons donc les écrire de la manière suivante :

$$e_n^1,\ e_n^2,\ e_n^3,\ \ldots,\ e_n^\nu,\ \ldots.$$

Si l'on fait varier le nombre n, on obtient un tableau à *double* entrée (e). Nous dirons que ce tableau (e) est *tableau canonique d'ensembles* E.

3. Considérons maintenant les propriétés du tableau canonique (e). Chaque ensemble e_n^ν étant un des produits π_μ, nous dirons que $e_n^{\nu'}$ est *diviseur régulier* de $e_m^{\nu''}$ $(m > n)$, s'il y a parmi les facteurs du produit $e_m^{\nu''}$ tous les facteurs du produit $e_n^{\nu'}$. Nous dirons qu'une suite

$$e_{n_1}^{\nu_1},\ e_{n_2}^{\nu_2},\ e_{n_3}^{\nu_3},\ \ldots,\ e_{n_k}^{\nu_k},\ \ldots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots)$$

est *chaîne régulière*, si e^{ν_k} est diviseur régulier de $e_{n_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

La partie commune à tous les ensembles $e_{n_k}^{\nu_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ d'une chaîne régulière sera nommée *noyau de cette chaîne régulière*.

Cela posé, le Tableau canonique (e) possède les propriétés suivantes :

1° Le noyau de toute chaîne régulière est contenu dans E;

2° Tout point de E (à une infinité dénombrable près) est contenu dans un au moins des noyaux;

3° L'ensemble e_n^{ν} étant donné, il existe, dans la $(n-1)^{\text{ième}}$ ligne, un ensemble $e_{n-1}^{\nu'}$ et un seul qui est un diviseur régulier de e_n^{ν};

4° Tout ensemble e_n^{ν} est un diviseur régulier d'un au moins des ensembles $e_m^{\nu'}(m > n)$;

5° Soit e_n^{ν} un diviseur régulier de $e_m^{\nu_i}$ $(m > n)$; quel que soit un ensemble M non dénombrable de points de E $(e_n^{\nu} - e_m^{\nu'})$, il existe toujours un ensemble $e_m^{\nu''}$ $(\nu'' \neq \nu')$ contenant une infinité non dénombrable de points de M et qui admet l'ensemble e_n^{ν} pour son diviseur régulier.

4. Passons maintenant à la démonstration du théorème fondamental :

Théorème. — *Tout ensemble de points non dénombrable mesurable* B *contient un ensemble parfait.*

Tout d'abord le théorème est évident s'il existe au moins une chaîne régulière, dont le noyau (toujours fermé) est non dénombrable. Passons donc au cas où le noyau de toute chaîne régulière est dénombrable.

Dans ce cas, quels que soient un ensemble e_n^{ν} et un ensemble parfait π contenu dans e_n^{ν} et contenant une infinité non dénombrable de points de E, il existe (en vertu de 5°), dans π, deux ensembles parfaits π_1 et π_2 sans point commun et contenant une infinité non dénombrable de points de E, tels que π_1 appartient à $e_m^{\nu'}(m > n)$, π_2 à $e_m^{\nu''}(\nu'' \neq \nu')$, $\pi_1 e_m^{\nu'} = 0$, $\pi_2 e_m^{\nu'} = 0$, où $e_m^{\nu'}$ et $e_m^{\nu''}$ sont deux ensembles dont e_n^{ν} est un diviseur régulier. Nous dirons que π_1 et π_2 sont *ensembles déduits de* π.

Cela posé, prenons dans e_1^1 un ensemble parfait π contenant une infinité non dénombrable de points de E. D'après ce qui précède, nous pouvons déduire de π deux ensembles π_1 et π_2; de l'ensemble π_{α_1} $(\alpha_1 = 1$ ou $2)$ deux ensembles $\pi_{\alpha_1 1}$ et $\pi_{\alpha_1 2}$; $\pi_{\alpha_1\alpha_2}$ $(\alpha_2 = 1$ ou $2)$ deux ensembles $\pi_{\alpha_1\alpha_2 1}$ et $\pi_{\alpha_1\alpha_2 2}$ et ainsi de suite. Le procédé se poursuit indéfiniment, de sorte qu'on obtient une suite infinie d'ensembles parfaits :

$$(1) \qquad \pi_{\alpha_1}, \pi_{\alpha_1\alpha_2}, \pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ldots, \pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ldots, \alpha_k, \ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k, \ldots$ est une suite infinie arbitraire d'entiers dont chacun est égal à 1 ou 2. La partie commune X à tous les ensembles π de la suite (1) appartient, d'après 1°, à l'ensemble donné E; l'ensemble de tous les X est évidemment un ensemble parfait contenu dans E, ce qui démontre la proposition.

PHYSICO-CHIMIE APPLIQUÉE. — *Sur la stabilité des hypochlorites en solutions très étendues. Conséquences au point de vue de leur emploi pour la stérilisation des eaux (javélisation).* Note de M. **Lucien Vallery**, présentée par M. Dastre.

L'étude que nous avons entreprise sur la stabilité des hypochlorites en solutions très étendues nous a donné des résultats que nous nous décidons à faire connaître, bien qu'ils soient très incomplets, en raison de l'importance qu'ils présentent au point de vue de l'emploi de ces corps pour la stérilisation des eaux (javélisation).

En solutions très étendues, correspondant à un titre pondéral en chlore actif, de l'ordre du millionième (nos expériences ont porté sur des solutions d'un titre compris entre 10^{-6} et 5×10^{-6}), les hypochlorites sont le siège d'un phénomène de décomposition lente, limitée ou non, suivant le titre initial, par un équilibre, et dont la limite, quand elle existe, est influencée d'une façon assez considérable par des variations apparemment très faibles du milieu.

La vitesse de cette décomposition, quand celle-ci paraît se faire normalement, c'est-à-dire en dehors de toute réaction chimique sensible, simultanée, et, plus généralement, de toute action perturbatrice, semble, d'une façon générale, être représentée analytiquement par une portion d'hyperbole équilatère; il ne nous est pas encore permis, cependant, de donner cette loi comme constante.

En ce qui concerne l'action exercée par les variations du milieu sur la décomposition des hypochlorites en solutions très étendues, il paraît y avoir lieu de distinguer :

1° Une action purement catalytique, positive ou négative;

2° Une action purement chimique, due à la présence, dans le milieu, de corps susceptibles d'entrer en réaction, soit avec la molécule d'hypochlorite, soit avec les produits de sa décomposition.

A l'une de ces deux catégories doit être rattachée l'action exercée par les germes contenus dans le milieu, action à laquelle permettent de conclure certaines études parues sur la javélisation.

Les résultats précédents ont, comme on le voit, une importance pour l'emploi des hypochlorites dans la stérilisation des eaux, tant au point de vue de l'efficacité de la méthode, puisque l'action stérilisante des hypo-

chlorites aux doses auxquelles on les emploie s'exerce pendant un temps assez considérable, qu'au point de vue de la nécessité de ne livrer l'eau à la consommation que lorsqu'elle ne contient plus que des traces de chlore actif, inférieures à la limite de perceptibilité des sens ($0^{mg},1$ à $0^{mg},15$ par litre).

A cause des phénomènes de décomposition, limitée ou non, dont il est parlé plus haut, il est indispensable, pour éviter des mécomptes, de n'employer, pour la stérilisation des eaux, la javélisation, qui se recommande à tant de points de vue, qu'à la condition de s'astreindre au contrôle chimique quantitatif, d'ailleurs très simple, que cette méthode exige.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Recherche du chlore libre dans les eaux d'alimentation urbaines.* Note de M. **G.-A. Le Roy**, présentée par M. Moureu.

Dans de nombreuses villes en France et à l'étranger, les eaux d'alimentation, avant d'être envoyées dans les canalisations urbaines, sont soumises à un traitement de purification bactérienne basé sur l'action de minimes quantités de chlore actif, fourni par des hypochlorites alcalins ou alcalino-terreux mis en œuvre sous leurs espèces commerciales de chlorure de chaux ou d'*eau de Javel*.

La dose de chlore à introduire dans l'eau est variable. En France, la circulaire du Ministre de l'Intérieur (du 25 septembre 1914) indique comme dose *moyenne* par litre d'eau $0^{mg},8$ de chlore actif; ce qui correspond à l'introduction de 1^{l} d'*eau de Javel* à 30° chlorométriques par chaque 100^{m^3} d'eau à purifier.

On admet généralement que le chlore actif ainsi introduit disparaît rapidement dans l'eau, du fait même de son action purificatrice, en se transformant en chlore inactif et combiné, qui vient se confondre avec celui des chlorures ($NaCl$, $CaCl^2$) naturellement contenus dans les eaux. Il importe que cette disparition du chlore actif, qui est plus ou moins rapide selon la nature de l'eau, sa teneur en matières organiques, en nitrites ou substances sulfurées, son état d'aération, de malaxage, de température, de solarisation, etc., soit accomplie avant l'arrivée aux robinets d'utilisation. En effet, s'il n'est pas démontré que de minimes quantités de chlore actif constamment ingérées dans l'eau de boisson ne soient pas insalubres en agissant, par exemple, sur les ferments digestifs,

il est évident que l'odeur et la saveur d'une eau contenant du chlore actif, et qui deviennent perceptibles dès que la dose atteint environ $0^{mg},05$ par litre, sont désagréables pour le consommateur.

Le contrôle chimique des eaux traitées par les hypochlorites est donc d'une évidente utilité. Malheureusement les réactifs propres à déceler le chlore actif très dilué dans l'eau, et même le réactif iodo-amidonné, qui est le meilleur d'entre eux, malgré sa non complète spécificité, deviennent inefficaces et inopérants quand la dose de chlore par litre descend au-dessous de $0^{mg},05$ environ.

J'ai donc cherché à remédier à cette lacune analytique par la création de la méthode suivante, que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie :

Cette méthode analytique est basée sur la congélation incomplète et fractionnée de l'eau à examiner, la congélation étant conduite de façon à provoquer d'une part l'élimination de la majeure partie de l'eau à l'état de glace pure, et d'autre part la migration du chlore actif dans la petite quantité d'eau laissée incongelée. Le chlore libre se trouvant ainsi concentré sans altération, malgré son instabilité, peut être facilement recherché et caractérisé par ses réactifs classiques.

La technique de l'opération est simple et facile. Elle se résume à : prendre un volume assez considérable de l'eau, si l'examen préalable par les réactifs a donné un résultat négatif, soit 10^{l} d'eau par exemple ; les placer dans un récipient métallique, à parois émaillées si possible ; refroidir, pendant plusieurs heures, par immersion dans un bain de saumure incongelable, fortement réfrigérée et en circulation. Avoir soin de ne pas agiter directement l'eau, ce qui provoquerait une aération nuisible, et procéder seulement par secousses mécaniques exercées extérieurement sur les parois du récipient. Quand il ne reste plus du liquide que la cinquantième partie environ du volume initial, recueillir ce liquide et le soumettre aux réactifs. Dans ces conditions, en opérant sur 10^{l} d'eau, on peut, avec le réactif iodo-amidonné (solution aqueuse à 1 pour 100 d'iodure de potassium, ou mieux, à mon sens, d'iodure de magnésium, additionnés d'empois amylacé), caractériser facilement $0^{mg},0005$ de chlore actif, dilué dans 1000^{g} d'eau. En opérant sur un volume d'eau plus considérable, soit 25^{l}, 50^{l}, 100^{l} (ce qui est facile, étant donnée la technique frigorifique), on peut rechercher et déceler de même le chlore actif jusqu'à des proportions infinitésimales.

On peut également, en certains cas, pousser jusqu'à la congélation totale, puis, après avoir démoulé le bloc de glace, fendre celui-ci longitudinalement en deux, de façon à mettre à nu la partie centrale et médullaire. On examine ensuite, en arrosant cette partie centrale avec le réactif iodo-amidonné, s'il y a apparition de la coloration bleue caractéristique, localisée en cet endroit.

Cette méthode qualitative peut être rendue quantitative. Il suffit de jauger exactement les volumes d'eau mis en œuvre et de la partie incon-

gelée, et de soumettre celle-ci à un examen comparatif, de préférence par voie colorimétrique, avec des solutions types titrées, soit d'iodure d'amidon, soit d'une matière colorante bleu violacé.

Cette méthode est applicable à l'examen des eaux d'alimentation destinées aux troupes en campagne, pour y déceler les traces de poisons, notamment volatils, qui pourraient y être introduits, en violation criminelle des lois de la guerre.

GÉOLOGIE. — *Sur la structure du Moyen Atlas (Maroc central).* Note [1] de M. **Louis Gentil.**

On ne sait à peu près rien sur la structure de la chaîne centrale du Maroc, qu'aucun géologue n'a traversée.

D'après les descriptions et les levés de reconnaissance de René Caillié, Rohlfs, de Foucauld, Schaudt, R. de Segonzac, on peut se rendre compte que cette chaîne présente une série de crêtes plus ou moins parallèles comprises entre la haute vallée de la Mlouya et la plaine de Meknès.

Cependant, malgré l'image qui nous en a été donnée par les voyageurs, le géographe allemand Theobald Fischer admet, en partant d'une rigoureuse analogie entre le Maroc et l'Espagne, que toute la partie centrale du Maghreb sur l'emplacement de laquelle s'élève la chaîne qui nous occupe doit être envisagée comme le prolongement des plateaux du Maroc occidental, que nous avons compris sous la dénomination de *Meseta marocaine* [2].

C'était, en somme, nier l'existence du Moyen Atlas en tant que chaîne plissée et donner de la structure générale du Nord-Ouest africain une idée un peu trop simple.

Je n'ai, pour ma part, jamais douté de l'allure plissée des reliefs du Maroc central; et si j'ai montré qu'il convenait de rétrécir cette chaîne [3], j'ai essayé d'entrevoir sa structure d'après les descriptions des voyageurs qui l'ont recoupée.

J'ai cru pouvoir dire, non sans quelque réserve, en me basant sur le voyage effectué par R. de Segonzac en 1901, que le Moyen Atlas devait

---

[1] Séance du 21 février 1916.

[2] Theobald Fischer, *Mittelmeer-Bilder, Gesammelte Abhandlungen zur Kunde der Mittelmeer-Länder*, neue Folge, p. 22 et suiv. Leipzig und Berlin, 1908.

[3] *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 89, et t. 158, 1914, p. 146.

être formé de grandes rides anticlinales, à flancs jurassiques, laissant percer dans l'échancrure des cols franchis par les pistes, les terrains paléozoïques et permo-triasiques [1].

J'ai pu enfin, l'été dernier, confirmer *de visu* cette interprétation qui accordait, jusqu'ici, une certaine part à l'hypothèse.

Ainsi que je l'avais pensé, le plateau des Beni Mguild forme le prolongement, vers le Sud, de celui des Beni Mtir.

De la falaise rocheuse de l'Ari Boudâa à Timhadit, la succession jurassique de grès calcaires et de dolomies des Beni Mtir se poursuit d'une façon régulière, sous les déjections basaltiques que j'ai récemment signalées [2]. Ces couches secondaires sont encore bien réglées et presque horizontales, légèrement inclinées vers le Sud et parcourues par des anticlinaux à faible amplitude dont l'un d'eux jalonne le bord de l'Ari Boudâa et montre son flanc méridional du côté du Tizi n Tretten et de l'Ichou Arrok.

D'autres plis peu accentués, de direction NEE-WSW, sont en grande partie masqués par les volcans quaternaires de cette région.

Malgré l'existence de ces anticlinaux, il m'a semblé impossible de considérer le plateau des Beni Mguild, pas plus que celui des Beni Mtir, comme appartenant à des régions plissées. On est encore, jusqu'à Timhadit, dans le régime tabulaire de la Meseta marocaine.

Mais, au delà, tout change. Une chaîne commence, à partir de l'oued Guigou, dont la première ride s'élève brusquement au-dessus de la plaine volcanique, par suite du redressement des couches calcaires et dolomitiques du Jurassique, jusque-là à peu près horizontales. Le Djebel Tisdadin, qui domine le poste de Timhadit, appartient au flanc septentrional de ce pli anticlinal.

Du sommet de cette arête, qui atteint environ l'altitude de 2300^{m}, le poste militaire étant à 1700^{m} environ, on a une vue d'ensemble sur la chaîne plissée du Moyen Atlas. On se rend compte que le Djebel Sidi Abd er Rahman el Fazzazi (Djebel Fazzaz des cartes) et le Tichioukt (2700^{m}) appartiennent encore à cette première ride; le Tichioukt fait partie du sommet de ce pli à couverture jurassique.

Plus au Sud une deuxième ride anticlinale est séparée de la première par une dépression synclinale qui comprend, notamment, la plaine de Selr'art. Elle est orientée parallèlement à la première. Le mausolée de Sidi Ali ou Mohammed, situé au bord d'un petit lac de montagne, se trouve à peu près dans sa zone axiale. C'est de ce côté que l'oued Sebou prend naissance. Sous le nom d'*oued Guigou* il traverse la première ride, au fond d'une gorge (kheneg), avant de côtoyer la chaîne au bord méridional de

---

(1) *Le Maroc physique*, p. 74 et suiv. Paris, Félix Alcan; 1912.

(2) *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 228.

la plaine volcanique des Beni Mguild. Le haut sommet du Djebel Bou Iblal (Dj. Mouça ou Salah, d'environ 4000^{m}) ferait partie de cette ride centrale.

Une troisième ride m'est apparue, qui surplombe, à l'horizon, la haute vallée de la Mlouya et derrière laquelle j'ai vu se profiler la silhouette de l'Ari Aïachi, l'un des culminants du Haut Atlas.

Ainsi le Moyen Atlas serait formé de trois rides anticlinales, comprises entre les plateaux tabulaires du Rekkam, dans l'Est; de la Meseta marocaine, dans l'Ouest. Les échantillons de roches anciennes, recueillis par R. de Segonzac, proviennent bien de la zone axiale de ces plis.

Je puis encore confirmer l'abaissement d'axe de ces plis que j'ai cru voir, à grande distance, du côté de la Moyenne Mlouya.

Du Koudiat el Abiod on voit les calcaires jurassiques qui couronnent le sommet du Djebel Tazekka s'abaisser vers Taza. Ils reposent, au Djebel Toumzit, sur des schistes paléozoïques, des granites et des grès rouges permo-triasiques, puis ils s'enfoncent sous les grès et les marnes miocènes de la « Trouée de Taza ». Ces crêtes calcaires font partie de la première ride du Fazzaz et du Tichioukt.

Plus à l'Est, on voit, de la piste de Taza à Guercif par Kasba Mçoun, la deuxième ride s'incliner vers la plaine miocène, depuis le Bou Iblal; mais l'abaissement d'axe de la troisième ride est beaucoup plus net. On voit les calcaires massifs du Djebel Reggou et du Djebel Keddamin, s'ennoyer sous les dépôts néogènes de la vallée moyenne de la Mlouya.

Une dernière observation me paraît, quoique avec une certaine réserve, digne d'être signalée.

Le soubassement jurassique des volcans des Beni Mguild est régulièrement incliné d'environ 10° vers le Sud et il m'a semblé qu'une grande fracture longitudinale devait séparer ce plateau de la première ride du Moyen Atlas, au voisinage de l'oued Guigou.

Au contraire, le plateau jurassique des Beni Mtir est légèrement incliné vers le Nord, et je maintiens mon impression première qu'une faille longe le bord de l'Ari Boudâa, marquant ainsi la limite des deux plateaux.

De toute façon, il faut admettre un jeu de cassures dans ce régime tabulaire et probablement aussi un tassement sur le versant septentrional du Moyen Atlas.

Nous voyons se répéter ainsi les phénomènes d'affaissement que j'ai signalés dans la plaine Marrakech sur le versant septentrional du Haut Atlas.

Ce rapprochement complète singulièrement l'analogie de structure qui doit exister entre ces deux grandes chaînes de l'Atlas marocain.

Enfin il me semble inutile d'insister sur la relation de cause à effet qui doit exister entre ces affaissements ou ces mouvements de bascule des pla-

teaux des Beni Mtir et des Beni Mguild et la présence de déjections basaltiques pliocènes ou quaternaires, qui les recouvrent.

Ces manifestations volcaniques marquent vraisemblablement le dernier acte des mouvements orogéniques et épirogéniques qui ont donné naissance à la chaîne centrale du Maroc.

GÉOLOGIE. — *Études sur les formations tertiaires du bassin de la mer de Marmara : classification et parallélisme des dernières couches néogènes de la région et des régions voisines.* Note [1] de M. N. **Arabu**, présentée par M. H. Douvillé.

On sait combien est à la fois délicate et peu sûre, dans l'état actuel de nos connaissances, la détermination des formes lacustres et surtout saumâtres. Si l'on a en vue, d'autre part, le développement que prennent les formations néogènes non marines, dans le sud-est de l'Europe, où elles occupent des étendues énormes, à l'exclusion de tout terme marin, on comprend de quelle utilité peuvent être les Vertébrés dans l'établissement des parallélismes.

Déjà, depuis 1881, des restes importants de Vertébrés, provenant de la région des Dardanelles, ont été étudiés par Neumayr [2]; ces restes, si l'on excepte le *Prodremotherium elongatum*, forme oligocène, très probablement en gisement secondaire, se répartissent entre deux faunes distinctes :

1° La faune à *Dinotherium bavaricum* et *Mastodon angustidens*, faune dite de Sansan.

2° La faune à *Hipparion*, de Pikermi et du Mont Léberon.

Seulement Neumayr ne connaissait pas le lieu exact d'origine de ces formes; les pièces avaient été soumises à son examen par M. Calvert, consul anglais d'alors aux Dardanelles, qui lui-même les tenait probablement d'autres personnes.

Dans ces conditions, Neumayr leur a attribué la place qu'elles occupent dans le bassin de Vienne où, comme on le sait, le Sarmatien est caractérisé encore par la faune Vindobonienne, tandis que la faune à *Hipparion* apparaît seulement dans les *couches à Congéries* qui le surmontent.

---

(1) Séance du 21 février 1916.

(2) Calvert et Neumayr, *Die jungen Ablagerungen am Hellespont* (*Denkschr. d. k. Akad. d. Wissensch., Math. Naturw. Cl.*, Bd. 40, p. 357).

Pendant un séjour en Turquie, il y a quelques années, j'ai eu l'occasion de trouver en place des formes appartenant à la faune à *Hipparion ;* or leur gisement n'est pas le Pontien, qui n'existe même pas dans la région, mais la base du Sarmatien des environs de Constantinople. Ce Sarmatien est constitué (¹) par des conglomérats puissants avec bancs de sables, reposant en discordance sur le Vindobonien; par-dessus viennent ces calcaires blancs stratifiés à *Mactra caspia* et *bulgarica*, qui frappent tout de suite le regard, quand on s'approche de Constantinople; l'endroit précis de la trouvaille est, sur le rivage de la mer, à 2^{km} à l'ouest du village Ambarly; les formes trouvées sont : *Camelopardalis attica* Gaud. et Lart. et une molaire d'*Antilope* non spécifiée encore.

La même découverte avait été faite depuis longtemps en Russie méridionale, par M. Sinzow (²), mais elle n'a pas attiré l'attention autant du moins que cela le méritait. Le fait étant intéressant, j'ai commencé il y a quelque temps, sur le conseil de M. Depéret, une revision de cette question, dont je voudrais faire connaître les principaux résultats.

De grandes difficultés s'opposent à de telles recherches; très nombreux sont les restes de Vertébrés, qui ont été signalés et très bien décrits en Roumanie et surtout en Russie méridionale (³), mais l'endroit précis des trouvailles, le côté stratigraphique est rarement touché; la plupart du temps, en effet, la découverte des pièces est faite par des personnes étrangères à la science; d'autres fois c'est l'observation qui est difficile : des remaniements postérieurs mélangent les faunes, ou même intervertissent leur succession normale, comme c'est le cas pour la bordure des Carpathes; il n'en existe pas moins un certain nombre de faits bien établis, sur lesquels on peut se baser.

L'apparition de la faune à *Hipparion* marque un moment très important pour le Néogène européen et M. Depéret (⁴) a pu montrer le synchronisme de cette faune pour les grands bassins néogènes de l'Europe centrale et occidentale; mais pour l'Europe sud-orientale, la variété des classifications proposées d'une part, l'incertitude des découvertes d'une autre, rendent ce point encore discutable.

(¹) N. Arabu, *Sur le Néogène du nord de la mer de Marmara* (*Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 347).

(²) J. Sinzow, *Geol. u. paleont. Beobachtungen in Südrussland*. Odessa, 1900.

(³) Voir les travaux de Gr. Stefanescu, de S. Athanasiu et surtout ceux de Marie Pawlow.

(⁴) Ch. Depéret, *Classification et parallélisme du système miocène* (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 3ᵉ série, t. 21, 1893, p. 170).

En effet cette faune apparaît dans le bassin du Rhône au sommet du Vindobonien; déjà dans le bassin de Vienne elle ne se trouve pas avant les couches à Congéries; le Sarmatien, dépôt très important ici, renferme encore la faune de Sansan. Plus loin vers l'Est, en Roumanie, on trouve des formes de Pikermi jusque dans le Dacien et comme d'autre part on a signalé, dans les mêmes couches, la faune à *Mastodon Borsoni*, qui dans l'Occident caractérise le Pliocène, on serait tenté d'interpréter ce fait comme dû à une migration de cette faune vers l'Est, comme sur un plan qui monterait dans cette direction à la fois dans le temps et dans l'espace.

Ceci peut difficilement être admis, étant donnée la précision à laquelle sont arrivées nos connaissances sur les faunes de Vertébrés.

Si, d'autre part, on suppose ce plan incliné ramené à l'horizontale, on se heurte à des difficultés plus grandes encore. En effet la fin du Néogène, comme on le sait, est caractérisée, dans le Sud-Est européen, par une succession de couches d'abord saumâtres, puis d'eau de plus en plus dessalée : c'est un ensemble important de formations, séparées souvent les unes des autres par des discordances ou des lacunes, contenant des faunes distinctes et auxquelles, en l'absence de tout terme marin de comparaison, on accorde la valeur d'étages; ces coupures sont avec de légères différences partout admises, le Sarmatien, le Méotique, le Pontien, puis le Dacien et enfin le Levantin.

Or cet ensemble, moins le Levantin qu'on est d'accord à paralléliser avec le Pliocène, se trouverait ainsi trop à l'étroit dans cette deuxième hypothèse : entre le niveau à *Hipparion*, qui occupe le sommet du Vindobonien dans le bassin du Rhône et ce Vindobonien lui-même, représenté dans le bassin euxinique par des formations marines parfaitement caractérisées.

On pourrait ainsi croire que la dessalure des eaux dans ce dernier bassin a commencé plus tôt à son centre qu'à la périphérie, ce qui n'est pas vraisemblable et qu'en outre plusieurs faits contredisent.

On voit dans ces circonstances l'importance du fait d'avoir des précisions sur le niveau exact de cette faune à *Hipparion* ou du moins du moment de son apparition; ce fait confirme d'abord la découverte déjà ancienne de M. Sinzow, laquelle à son tour permet de préciser que les couches à *Mactra caspia* des environs de Constantinople, dépôts d'eau très dessalée et difficiles à paralléliser, appartiennent au *Sarmatien supérieur* et toutes les deux démontrent que non seulement le Pontien, mais le Méotique et même une partie du Sarmatien, avaient franchi en Europe orientale ce niveau à *Hipparion*.

GÉOLOGIE. — *Sur l'existence d'un ridement d'âge paléozoïque entre le Yunnan et le Tonkin.* Note (¹) de M. **Deprat**, présentée par M. Douvillé.

J'ai montré à plusieurs reprises que les faunes fossiles sont fréquemment marquées par des différences très nettes au Yunnan et au Tonkin. Ceci paraît dû à l'existence d'un important ridement qui, dès les temps les plus anciens, s'est esquissé en formant une vaste courbe, reliant l'élément continental chinois sud-oriental et la chaîne cristalline annamitique.

Pendant le Cambrien, l'Ordovicien et le Gothlandien, il paraît avoir joué un rôle assez faible, car de part et d'autre on observe le Cambrien, ainsi que le montre ma découverte récente des terrains de cet âge au Tonkin; les couches ordoviciennes à *Trinucleus ornatus* que j'ai observées au Tonkin et qui sont équivalentes des couches à *Dionide formosa* yunnanaises le prouvent aussi; avec le Gothlandien apparaissent des modifications, mais faibles, car on retrouve au Yunnan et au Tonkin des dépôts analogues, notamment les couches à *Spirifer tonkinensis* qui se poursuivent sans interruption.

Mais avec le Dévonien tout change; les dépôts de cet âge sont absents sur l'emplacement de la région des grandes nappes qui correspond à cette ancienne chaîne et par conséquent dans la zone du Nan-Ti, au sud de Kaï-Hoa-Fou et dans le nord du Tonkin. La communication paraît s'être close à ce moment entre le Tonkin et les mers chinoises; outre l'absence précitée du Dévonien sur l'emplacement de la chaîne en question, les faunes diffèrent du tout au tout; l'exemple le plus typique réside dans le fait d'un Dévonien moyen à faune complètement rhénane et ardennaise au Yunnan, contrastant totalement avec les dépôts de même âge au Tonkin, qui offrent une faune essentiellement américaine (couches à *Plethomylus*). Ensuite, pendant le Dinantien, une dissemblance absolue existe entre les calcaires noirs à *Fusulinelles* et *Spirifer angustirostris* et les couches à *Phillipsia* du Tonkin et d'Annam et les marnes calcareuses à *Spirifer subconicus* et *Productus undatus* du Yunnan. La chaîne s'accentue encore davantage pendant le Carboniférien moyen qui est supprimé au Tonkin, tandis qu'au Yunnan il offre un développement considérable.

(¹) Séance du 14 février 1916.

L'Ouralien accuse un mouvement de submersion; la mer recouvre alors le ridement, en y laissant cependant des îles; les termes inférieurs de l'Ouralien manquent au Tonkin. Les conditions restent stagnantes pendant l'Artinskien et le Pendjabien, mais à la fin de la période, l'émersion est générale et les dépôts marins sont cantonnés dans l'est du Tonkin, la chaîne ayant pris une largeur considérable.

Avec le Trias une communication s'établit largement par le géosynclinal de la rivière Noire qui permet à la faune werfénienne d'offrir au Tonkin les espèces de la série himalayenne à *Danubites*, avec un mélange d'espèces américaines. Pendant le Trias moyen et supérieur le géosynclinal de la rivière Noire permet encore le mélange d'espèces indoues et américaines; puis avec la fin du Lias et le début des temps médiojurassiques, l'issue est close pour toujours.

C'est sur cette barre, sur ce ridement ancien reliant l'élément continental chinois sud-oriental et la chaîne annamitique que viendront plus tard déferler les vagues orogéniques du Yunnan, et s'empiler les puissantes nappes de la région du Nan-Ti et du Haut Song Chay, tandis que sous cette poussée, sous l'écrasement formidable qu'elle subira, elle se transformera en mylonites granitiques. Cette vieille chaîne, esquissée dès l'aube des temps paléozoïques, a donc joué dans l'histoire d'une partie de l'Asie sud-orientale un rôle prédominant, tant par les séparations en provinces zoologiques très différentes qu'elle a provoquées, que par son importance comme môle résistant contre lequel ont déferlé, et par-dessus lequel ont passé les grandes nappes originaires du Nord.

A 15 heures trois quarts l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 heures.

A. Lx.